Analisi Matematica 1, Ing. Gestionale 2023-2024 (787AA)
Appello 3

12-02-2024

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 3, 12-02-2024

NOME E COGNOME: ____________________ **MATRICOLA:** ____________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE A

1. Calcolare la derivata di $f(x) = \log(\log(2 + x^2))$.

   Sol. $f'(x) = \frac{2x}{(2+x^2)\log(2+x^2)}$.

2. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2} dx$.

   Sol. $-2\log|x-1| + 3\log|x-2| + c$.

3. Trovare la soluzione generale dell'equazione di secondo grado $x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$.

   Sol. $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}(c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t))$.

4. Calcolare il polinomio di Taylor P_N di grado $N = 6$ (senza resti!) di $f(x) = \sin^2(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$.

   Sol. $P_6 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45}$.

5. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x y^2 e^{-y} dy$.

   Sol. $f'(x) = x^2 e^{-x}$, $f''(x) = xe^{-x}(2 - x)$. Sempre crescente; convessa in $[0, 2]$, concava altrove.

6. Dire se una funzione discontinua in un punto può essere derivabile in tal punto, e giustificare la risposta.

   Sol. No, poiché derivabile implica continua.

7. Dire se la seguente funzione è continua in $x = 0$, giustificando la risposta:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(2x^3)}{x^3} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 2 \quad \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Sol. Sì, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$.

8. Dire e giustificare se si può applicare il Teorema di Rolle alla funzione $f(x) = \sqrt{\arctan(1 + \log(2 + \cos x))}$ sull'intervallo $[\pi/2, 3\pi/2]$.

   Sol. Sì, poiché la funzione è continua, derivabile in $(\pi/2, 3\pi/2)$ e $f(\pi/2) = f(3\pi/2)$.

9. Scrivere in coordinate polari i seguenti numeri complessi: a) $z = \frac{1}{6}(1 - i)$ e b) $z = 1 + i$.

   Sol. a) $(\rho, \theta) = (\frac{\sqrt{2}}{6}, -\pi/4)$; b) $(\rho, \theta) = (\sqrt{2}, \pi/4)$.

10. Disegnare graficamente la regione di piano descritta da $\sin x \leq y \leq \cos x$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$, indicando sulla retta delle ascisse i valori dei punti dove le curve si intersecano.

    Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 3, 12-02-2024

NOME E COGNOME: ____________________ **MATRICOLA:** ____________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE B

1. Calcolare la derivata di $f(x) = \log(\log(3 + x^3))$.

   Sol. $f'(x) = \frac{3x^2}{(3+x^3)\log(3+x^3)}$.

2. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}dx$.

   Sol. $\frac{2}{3}\log|x-2| + \frac{1}{3}\log|x+4| + c$.

3. Trovare la soluzione generale dell'equazione di secondo grado $x''(t) + 5x'(t) + 10x(t) = 0$.

   Sol. $x(t) = e^{-\frac{5t}{2}}(c_1 \cos(\frac{\sqrt{15}}{2}t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{15}}{2}t))$.

4. Calcolare il polinomio di Taylor P_N di grado $N = 6$ (senza resti!) di $f(x) = -\sin^2(-x)$ in un intorno di $x_0 = 0$.

   Sol. $P_6 = -x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45}$.

5. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x y^3 e^{-y} dy$.

   Sol. $f'(x) = x^3 e^{-x}$, $f''(x) = x^2 e^{-x}(3-x)$. Crescente per $x \geq 0$, decrescente altrove; convessa in $x \leq 3$, concava altrove.

6. Dire se una funzione derivabile in un punto può essere discontinua in tal punto, e giustificare la risposta.

   Sol. No, poiché derivabile implica continua.

7. Dire se la seguente funzione è continua in $x = 0$, giustificando la risposta:

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x^3)}{4x^3} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 2 \quad \text{se} & x = 0 \end{cases}$$

   Sol. No, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4} \neq 2$.

8. Dire e giustificare se si può applicare il Teorema di Rolle alla funzione $f(x) = \sqrt{\arctan(2 + \log(2 + \cos^2 x))}$ sull'intervallo $[0, \pi]$.

   Sol. Sì, poiché la funzione è continua, derivabile in $(0, \pi)$ e $f(0) = f(\pi)$.

9. Scrivere in coordinate polari i seguenti numeri complessi: a) $z = 1 + i\sqrt{3}$ e b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

   Sol. a) $(\rho, \theta) = (2, \pi/3)$; b) $(\rho, \theta) = (1, -\pi/6)$.

10. Disegnare graficamente la regione di piano descritta da $\cos x \leq y \leq \sin x$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$, indicando sulla retta delle ascisse i valori dei punti dove le curve si intersecano.

    Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 3, 12-02-2024

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE C

1. Calcolare la derivata di $f(x) = \log(\log(4 + x^4))$.

   Sol. $f'(x) = \frac{4x^3}{(4+x^4)\log(4+x^4)}$.

2. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx$.

   Sol. $2\log|x+1| - \log|x+2| + c$.

3. Trovare la soluzione generale dell'equazione di secondo grado $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 0$.

   Sol. $x(t) = e^t(c_1\cos(t) + c_2\sin(t))$.

4. Calcolare il polinomio di Taylor P_N di grado $N = 6$ (senza resti!) di $f(x) = \cos^2(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$.

   Sol. $P_6 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45}$.

5. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione $f(x) = -\displaystyle\int_0^x y^4e^{-y}dy$.

   Sol. $f'(x) = -x^4e^{-x}$, $f''(x) = x^3e^{-x}(x-4)$. Sempre decrescente; concava in $[0,4]$, convessa altrove.

6. Dire se una funzione discontinua in un punto può essere derivabile in tal punto, e <u>giustificare</u> la risposta.

   Sol. No, poiché derivabile implica continua.

7. Dire se la seguente funzione è continua in $x = 0$, <u>giustificando</u> la risposta:

$$f(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{2x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ e \quad \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Sol. No, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = e^2 \neq e$.

8. Dire e <u>giustificare</u> se si può applicare il Teorema di Rolle alla funzione $f(x) = \sqrt{\arctan(1 + e^{2+\sin^2 x})}$ sull'intervallo $[0,\pi]$.

   Sol. Sì, poiché la funzione è continua, derivabile in $(0,\pi)$ e $f(0) = f(\pi)$.

9. Scrivere in coordinate polari i seguenti numeri complessi: a) $z = 1 - i\sqrt{3}$ e b) $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

   Sol. a) $(\rho,\theta) = (2, -\pi/3)$;   b) $(\rho,\theta) = (\sqrt{2}/2, \pi/4)$.

10. Disegnare graficamente la regione di piano descritta da $\sin x \leq y \leq \cos x$ sull'intervallo $[-2\pi, 0]$, indicando sulla retta delle ascisse i valori dei punti dove le curve si intersecano.

   Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 3, 12-02-2024

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE D

1. Calcolare la derivata di $f(x) = \log(\log(5 + x^5))$.

   Sol. $f'(x) = \frac{5x^4}{(5+x^5)\log(5+x^5)}$.

2. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-x-6}dx$.

   Sol. $\frac{3}{5}\log|x+2| + \frac{2}{5}\log|x-3| + c$.

3. Trovare la soluzione generale dell'equazione di secondo grado $x''(t) - 3x'(t) + 3x(t) = 0$.

   Sol. $x(t) = e^{\frac{3t}{2}}(c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t))$.

4. Calcolare il polinomio di Taylor P_N di grado $N = 6$ (senza resti!) di $f(x) = -\cos^2(-x)$ in un intorno di $x_0 = 0$.

   Sol. $P_6 = -1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45}$.

5. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione $f(x) = -\displaystyle\int_0^x y^5 e^{-y}dy$.

   Sol. $f'(x) = -x^5e^{-x}$, $f''(x) = x^4e^{-x}(x-5)$. Crescente per $x \le 0$, decrescente altrove; concava in $x \le 5$, convessa altrove.

6. Dire se una funzione derivabile in un punto può essere discontinua in tal punto, e giustificare la risposta.

   Sol. No, poiché derivabile implica continua.

7. Dire se la seguente funzione è continua in $x = 0$, giustificando la risposta:

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{2x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Sol. Sì, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1$.

8. Dire e giustificare se si può applicare il Teorema di Rolle alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{\arctan(1 + e^{2+\sin^4 x})}$ sull'intervallo $[-\pi, 0]$.

   Sol. Sì, poiché la funzione è continua, derivabile in $(-\pi, 0)$ e $f(0) = f(-\pi)$.

9. Scrivere in coordinate polari i seguenti numeri complessi: a) $z = \frac{1}{4}(-1 + i)$ e b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

   Sol. a) $(\rho, \theta) = (1/\sqrt{8}, 3\pi/4)$; b) $(\rho, \theta) = (1, 11\pi/6)$.

10. Disegnare graficamente la regione di piano descritta da $\cos x \le y \le \sin x$ sull'intervallo $[-2\pi, 0]$, indicando sulla retta delle ascisse i valori dei punti dove le curve si intersecano.

    Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 3, 12-02-2024

NOME E COGNOME: ____________________ **MATRICOLA:** ____________

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE I

1. Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.
   Determinarne dominio, immagine, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia e convessità. Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
   Calcolare l'area sottesa al grafico della funzione in un intervallo $[a,b] \subset (0,1)$ (il cambio di variabile $x = \cos y$ potrebbe essere utile).

2. Si trovi la soluzione generale $x(t)$ di $x' - 4t(1+x)^3\cos(t^2) = 0$.
   Si determini la soluzione che verifica $x(0) = 0$.
   Per la soluzione trovata nel punto precedente, si scriva lo sviluppo di Taylor con resto di Peano in un intorno di $t = 0$ fino al sesto ordine della soluzione.

Sol. 1. $f(x)$ è definita su $(-1,1) \setminus \{0\}$, è pari, tende a $+\infty$ per $x \to 1^-$ e per $x \to 0^+$, a $+\infty$ se $x \to 0^-$ e se $x \to -1^+$. Funzione illimitata, quindi $\sup f = \infty$ e a funzione è positiva.
La derivata è
$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3(1-x^2)^{3/2}},$$
ed $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Inoltre, $f' < 0$ se $x \in (-1, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ e $x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$, positiva altrimenti. Quindi decrescente in questi due intervalli e crescente altrimenti. $x = \pm\sqrt{2/3}$ sono punti di minimo relativo (e assoluto). L'immagine di f è $[\frac{3\sqrt{3}}{2}, \infty)$. Per gli intervalli di convessità studiamo la derivata seconda.
$$f''(x) = \frac{12x^4 - 15x^2 + 6}{x^4(1-x^2)^{5/2}},$$
che non si annulla mai, è positiva in tutto il dominio di definizione, quindi sempre convessa.
Per l'area bisogna calcolare la primitiva di f. Col cambio di variabile $x = \cos y$ si ha
$$\int f(x)dx = -\int \frac{1}{\cos^2 y}dy = -\tan(y) = -\tan(\arccos x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$
Si conclude con
$$\int_a^b f(x)dx = -\frac{\sqrt{1-b^2}}{b} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$
Sol. 2. L'equazione è a variabili separabili e la soluzione generale è data da
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{-4\sin(t^2) + c}} - 1.$$
Vogliamo che $x(0) = 0$ quindi
$$c = 1.$$
Dunque per tale c si ha che
$$x(t) = 2t^2 + 6t^4 - \frac{61}{3}t^6 + o(t^6)$$
utilizzando gli sviluppi per $\sin x$ e $(1+x)^{-1/2}$ in un intorno di $x = 0$.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), 3, 12-02-2024

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE II

1. Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.
   Determinarne dominio, immagine, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia e convessità. Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
   Calcolare l'area sottesa al grafico della funzione in un intervallo $[a,b] \subset (0,1)$ (i cambi di variabile $x = \sin y$ e poi $t = \tan(y/2)$ e quindi $\sin y = \frac{2t}{t^2+1}$ e $dy = \frac{2dt}{1+t^2}$ potrebbe essere utili).

2. Si trovi la soluzione generale $x(t)$ di $x' - 3t(1+x)^3 \sin(t^2) = 0$.
   Si determini la soluzione che verifica $x(0) = 0$.
   Per la soluzione trovata nel punto precedente, si scriva lo sviluppo di Taylor con resto di Peano in un intorno di $t = 0$ fino al quarto ordine della soluzione.

Sol. 1. $f(x)$ è definita su $(-1,1) \setminus \{0\}$, è dispari, tende a $+\infty$ per $x \to 1^-$ e per $x \to 0^+$, a $-\infty$ se $x \to 0^-$ e se $x \to -1^+$. Funzione illimitata, quindi $\sup f = \infty$ e $\inf f = -\infty$. La funzione è positiva in (0,1), negativa altrimenti.
La derivata è

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2(1-x^2)^{3/2}},$$

ed $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Inoltre, $f' > 0$ se $x \in (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, negativa altrimenti. Quindi crescente in questi due intervalli e decrescente altrimenti. $x = \sqrt{2}/2$ è punto di minimo relativo e $x = -\sqrt{2}/2$ è punto di massimo relativo. L'immagine di f è $\mathbb{R} \setminus (f(-2\sqrt{2}), f(\sqrt{2}/2))$. Per gli intervalli di convessità studiamo la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{6x^4 - 5x^2 + 2}{x^3(1-x^2)^{5/2}},$$

che non si annulla mai, è positiva in $(0,1)$, quindi convessa, e concava altrimenti .
Per l'area bisogna calcolare la primitiva di f. Col cambio di variabile $x = \sin y$ si ha

$$\int f(x)dx = -\int \frac{1}{\sin y} dy$$

e col successivo cambio di variabile $t = \tan(y/2)$ quindi $\sin y = \frac{2t}{1+t^2}$ e $dy = \frac{2dt}{1+t^2}$ si ha

$$\int f(x)dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log|\tan(y/2)|.$$

Si conclude con

$$\int_a^b f(x)dx = \log\left|\tan\left(\frac{\arcsin b}{2}\right)\right| - \log\left|\tan\left(\frac{\arcsin a}{2}\right)\right|$$

e ricordando l'identità $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Sol. 2. L'equazione è a variabili separabili e la soluzione generale è data da

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{3\cos(t^2) + c}} - 1.$$

Vogliamo che $x(0) = 0$ quindi

$$\frac{1}{\sqrt{3+c}} - 1 = 0 \iff c = -2.$$

Dunque per tale c si ha che

$$x(t) = \frac{3}{4}t^4 + o(t^4)$$

utilizzando gli sviluppi per $\cos x$ e $(1+x)^{-1/2}$ in un intorno di $x = 0$.